Τελική Εξέταση-Απειροστικός Λογισμός Ι (περιττοί ΑΜ), 18/01/2021

Διδάσκων: Ελευθέριος Νικολιδάκης

Θέμα 1ο.

i) [0.5 μον.] Αποδείξτε ότι για κάθε $t \in (0,1)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι αληθές ότι $t^n < \frac{1}{n+1-nt}$.

ii) [1 μον.] Δίνεται μη κενό φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει η εξής σχέση:

$$sup(A) - inf(A) = \frac{1}{4}.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχουν ακολουθίες (x_n) και (y_n) με όρους στο σύνολο A ώστε $x_n - y_n \to \frac{1}{4}$ και $x_n > y_n + \frac{4n^4}{(2n+1)^4}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Θέμα 2ο.

i) [0.25 μον.] Αν η (x_n) είναι φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών και (y_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών ώστε $y_n \to 0$, αποδείξτε ότι $x_n y_n \to 0$.

ii) [0.5 μον.] Δίνεται η ακολουθία

$$x_n = \frac{\sqrt[n]{3^n + 4^n + ... + (n+5)^n}}{n}.$$

Αποδείξτε ότι συγκλίνει και βρείτε το όριο της.

iii) [1 μον.] Δίνεται ακολουθία (x_n) και $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα: $x_{2n+1} \to b$, $x_{4n} \to a$, $x_{4n+2} \to a$ και $x_{4^n+3} \to a$. Αποδείξτε ότι $x_n \to a$.

Θέμα 3ο.

i) Δίνεται η εξής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2|x|^{1/2}, & x \in \mathbb{Q} \\ |x|^{1/4}, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

(1) [1.25 μον.] Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

(2) [0.5 μον.] Αποδείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $x_1 = 16$.

ii) [1 μον.] Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (όπου $a, b \in \mathbb{R}$), ώστε

$$f(x) \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{3 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\},$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Θέμα 4ο.

i) [0.75 μον] Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ ώστε η f' να ικανοποιεί την εξής σχέση: $|f'(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{y}}$, για κάθε $y \in (0,1)$. Αποδείξτε ότι $lim_{x \to 0^+}[f(2x) - f(x)] = 0$.

ii) [1.25 μον] Δίνεται η εξής συνάρτηση $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} ln(x), & x \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+ \\ x - 1, & x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Εξετάστε αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Υπολογίστε την $g'(1)$ στην περίπτωση που η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

Θέμα 5ο.

i) [2 μον] Αποδείξτε ότι αν $k \in \mathbb{N}$ και $a_1, a_2, ..., a_k$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί τότε

$$\sum_{n=1}^{k} (a_1 a_2 ... a_n)^{1/n} < e \sum_{n=1}^{k} a_n.$$

(Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε ότι $(1 + \frac{1}{n})^n < e$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$).

Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.